Ecole Nationale Supérieure
des Arts et Industries Textiles

CONCOURS D'ENTREE A - 2003

EPREUVE de MATHEMATIQUE 1

Durée 2 heures

(tous les candidats)

L'usage de la calculatrice est interdit

Dans tout ce problème, m et k sont des réels donnés, on note $(E_{m,k})$ l'équation différentielle : $x.y'' + m.y' + k.x.y = 0$.

On étudie sur R^{+*} les solutions de $(E_{m,k})$ telles que $\lim_{x\to 0^+} y(x) = 1$.

Première partie : On prend m=2.

1) Déterminer k pour que la fonction $f(x) = \frac{\exp(x)}{x}$ soit solution de $(E_{2,k})$ sur R^{+*}. On choisira, pour la première question, cette valeur de k.

Montrer que la fonction $g(x) = \frac{\exp(-x)}{x}$ vérifie la même équation différentielle $(E_{2,k})$ sur R^{+*}.

En déduire l'ensemble des solutions de $(E_{2,k})$ sur R^{+*}, et la solution de $(E_{2,k})$ qui tend vers 1 quand $x \to 0^+$.

2) On prend k quelconque.

Effectuer dans $(E_{2,k})$ le changement de fonction inconnue : $y(x) = \frac{1}{x}.z(x)$.

En déduire toutes les solutions de $(E_{2,k})$ sur R^{+*}. (on distinguera 3 cas de figure selon que $k = 0, k = \alpha^2 > 0, k = -\alpha^2 < 0$).

Montrer que, pour toute valeur de k, il existe une solution ayant pour limite 1 quand $x \to 0^+$. Montrer que cette solution admet un développement en série entière que l'on précisera.

3) Application : Déterminer toutes les fonctions $u : R \to R$, $r \to u(r)$ de classe C^2 sur R^{+*}, telles que la fonction $F : R^3 \to R$, $(x,y,z) \to u(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ vérifie :

$$\forall (x,y,z) \in R^3, (x,y,z) \neq (0,0,0) :$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(x,y,z) + k.F(x,y,z) = 0$$
$$\text{et} \quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} F(x,y,z) = 1.$$

Deuxième partie : On prend m=1.

A) Soit la fonction $J_0 : R \to R$, telle que $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\cos t).dt$.

1) a) Montrer que J_0 est une fonction de classe C^2 sur R.

b) Montrer que J_0 est solution de l'équation différentielle $(E_{1,1})$. Calculer $J_0(0)$.

2) Montrer que : $\forall n \in N \quad \int_0^{\pi} \cos^{2n} t.dt = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\pi$.

En déduire le développement en série entière de $J_0(x)$.

B) Soit la fonction $K_0 : R \to R$, telle que $K_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} ch(x \cos t).dt$.

1) Montrer que K_0 est une fonction de classe C^2 sur R.
Déterminer k tel que K_0 soit solution de l'équation différentielle $(E_{1,k})$. Calculer $K_0(0)$.

2) Déterminer le développement en série entière de $K_0(x)$.

C) 1) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle $(E_{1,0})$ sur R^{+*}. Déterminer celle des solutions qui tend vers 1 quand $x \to 0^+$.

2) On suppose $k \neq 0$. On fait dans l'équation différentielle $(E_{1,k})$ le changement de variable $x = \varphi(u) = \alpha \times u$. ($\alpha$ réel strictement positif donné). Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la fonction $z(u) = y(x) = y \circ \varphi(u)$?
En déduire que pour tout k non nul, l'équation différentielle $(E_{1,k})$ admet une solution sur R^{+*} telle que $\lim_{x \to 0^+} y(x) = 1$.

Troisième partie : On prend m réel quelconque non nul.

Déterminer les séries entières $\sum_{n \in N} a_n x^n$ dont la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vérifie l'équation différentielle $(E_{m,k})$ sur son intervalle ouvert de convergence supposé non vide et telles que $S(0) = 1$.
On précisera la relation de récurrence vérifiée par les coefficients a_n, la valeur des coefficients a_{2p+1} et a_{2p}, ainsi que le rayon de convergence de la série entière.